- $\mathsf{Mincover}_{\mathsf{SPH}}([a,b],\mathsf{lb},\mathsf{ub},\theta)$:
  1. compute $a_{\mathbf{ost}} \leftarrow \mathsf{OSTType}(a,\mathsf{lb},\mathsf{ub})$;
  2. compute $b_{\mathbf{ost}} \leftarrow \mathsf{OSTType}(b,\mathsf{lb},\mathsf{ub})$;
  3. parse $a_{\mathbf{ost}}$ as $(a_{\mathbf{2}},\mathsf{lb},\mathsf{ub})$ and $a_{\mathbf{ost}}$ as $(b_{\mathbf{2}},\mathsf{lb},\mathsf{ub})$;
  4. initialize a set $\mathbf{C}=\emptyset$;
  5. find the maximum value $i^* \in \{0,\cdots,|a_{\mathbf{2}}|\}$ such that $a_{\mathbf{2}}[0,i^*]=b_{\mathbf{2}}[0,i^*]$;
  6. set $\mathsf{pref} := a_{\mathbf{2}}[0,i^*]$;
  7. compute $\mathsf{Mincover}_{\mathsf{rec}}(\mathbf{C},\mathsf{pref},a,b)$;
  8. if $\theta > 1$,
     (a) initialize a set levels;
     (b) for $i := 0$ to n, if θ divides i, then set $\mathsf{levels} := \mathsf{levels} \cup i$;
     (c) for all $c \in \mathbf{C}$,
        i. if $|c| \notin \mathsf{levels}$,
           A. let $\gamma \in \mathsf{levels}$ be the smallest value such that $|c|+1 \leq \gamma$;
           B. set $y = \gamma - |c| - 1$;
           C. for all $p_{\mathbf{2}} \in \{0,1\}^y$, add $c \| p_{\mathbf{2}}$ to $\mathbf{C}$;
           D. remove c from $\mathbf{C}$;
  9. if $\mathbf{C}=\emptyset$, set $\mathbf{C} := \mathbf{root}$;
  10. output $\mathbf{C}$.
- $\mathsf{Mincover}_{\mathsf{rec}}(\mathbf{C},\mathsf{pref},a,b)$:
  1. define four variables $\mathsf{minLeftTree}$, $\mathsf{maxLeftTree}$, $\mathsf{minRightTree}$ and $\mathsf{maxRightTree}$;
  2. if $|\mathsf{pref}_{\mathbf{2}}| = n$, set $\mathsf{minLeftTree} := \mathsf{maxLeftTree} := \mathsf{minRightTree} := \mathsf{maxRightTree} := \mathsf{pref}$;
  3. if $|\mathsf{pref}_{\mathbf{2}}| \leq n-1$,
     (a) set $\mathsf{minLeftTree} := \mathsf{maxLeftTree} := \mathsf{pref}_{\mathbf{2}} \| 0$;
     (b) set $\mathsf{minRightTree} := \mathsf{maxRightTree} := \mathsf{pref}_{\mathbf{2}} \| 1$;
  4. set $\lambda := n - |\mathsf{minLeftTree}|$;
  5. set $\mathsf{minLeftTree} := \mathsf{minLeftTree} \| \mathbf{0}^\lambda$ and $\mathsf{maxLeftTree} := \mathsf{maxLeftTree} \| \mathbf{1}^\lambda$;
  6. set $\mathsf{minRightTree} := \mathsf{minRightTree} \| \mathbf{0}^\lambda$ and $\mathsf{maxRightTree} := \mathsf{maxRightTree} \| \mathbf{1}^\lambda$;
  7. if $a \leq \mathsf{minLeftTree}$ and $\mathsf{maxRightTree} \leq b$, set $\mathbf{C} := \mathbf{C} \cup \mathsf{pref}$;
  8. else,
     (a) if $a \leq \mathsf{maxLeftTree}$, compute $\mathsf{Mincover}_{\mathsf{rec}}(\mathbf{C},\mathsf{pref}\|0,a,b)$;
     (b) if $b \geq \mathsf{minRightTree}$, compute $\mathsf{Mincover}_{\mathsf{rec}}(\mathbf{C},\mathsf{pref}\|1,a,b)$;

Figure 23: The minimum cover algorithm.

- $\mathsf{Edges}_{\mathsf{SPH}}(v,\mathsf{lb},\mathsf{ub},\theta)$:
  1. compute $a_{\mathbf{ost}} \leftarrow \mathsf{OSTType}(v,\mathsf{lb},\mathsf{ub})$;
  2. parse $a_{\mathbf{ost}}$ as $(a_{\mathbf{2}},\mathsf{lb},\mathsf{ub})$;
  3. initialize an empty set $\mathbf{C}$;
  4. set $\mathbf{C} := \mathbf{C} \cup \{\mathbf{root}, a_{\mathbf{2}}\}$;
  5. for all $1 \leq i \leq |a_{\mathbf{2}}| - 1$,
     (a) if θ divides i, set $\mathbf{C} := \mathbf{C} \cup a_{\mathbf{2}}[1,i]$;
  6. output $\mathbf{C}$.

Figure 24: The edges extraction algorithm.

- $\mathsf{OSTType}(v, \mathsf{lb}, \mathsf{ub})$:
  1. if $\mathsf{lb} = \mathsf{ub} = \perp$,
     (a) if $\mathsf{type}(v) = \texttt{sint32}$, set $v_{\mathbf{ost}} := \big([v + 2^{31}]_{\mathbf{2}}, 0, 2^{32} - 1\big)$;
     (b) if $\mathsf{type}(v) = \texttt{int64}$, set $v_{\mathbf{ost}} := \big(v_{\mathbf{2}}, 0, 2^{64} - 1\big)$;
     (c) if $\mathsf{type}(v) = \texttt{sint64}$, set $v_{\mathbf{ost}} := \big([v + 2^{63}]_{\mathbf{2}}, 0, 2^{64} - 1\big)$;
     (d) if $\mathsf{type}(v) = \texttt{bin64}$,
        i. if, for all $52 \leq i \leq 62$, $v_{\mathbf{2}}[i] = 1$, then set $v_{\mathbf{ost}} := (\perp, \perp, \perp)$;
        ii. else set
        $$v_{\mathbf{ost}} := \left(\left[(-1)^{v_{\mathbf{2}}[63]} \cdot \sum_{i=0}^{62} v_{\mathbf{2}}[i] \cdot 2^i + 2^{63}\right]_{\mathbf{2}}, 0, 2^{64} - 1\right)$$
     (e) if $\mathsf{type}(v) = \texttt{dec128}$,
        i. parse v as $v_{\mathbf{10}} = (-1)^{v_{\mathbf{2}}[127]} \cdot a \cdot 10^e$;
        ii. let ρ be an integer between
        $$\log_{10}\left(\frac{10^{34} - 1}{10 \cdot a}\right) \quad \text{and} \quad \log_{10}\left(\frac{10^{34} - 1}{a}\right)$$
        iii. if, for all $1 \leq i \leq 5$, $v_{\mathbf{2}}[121 + i] = 1$, then set $v_{\mathbf{ost}} = (\perp, \perp, \perp)$;
        iv. else if $a = 0$, set $v_{\mathbf{ost}} := (2^{127}, 0, 2^{128} - 1)$;
        v. else if $\rho \leq e + 6176$, set
        $$v_{\mathbf{ost}} := \left(\left[(-1)^{v_{\mathbf{2}}[127]} \cdot \big(10^{\rho} \cdot a + (10^{34} - 1) \cdot (e + 6176 - \rho)\big) + 2^{127}\right]_{\mathbf{2}}, 0, 2^{128} - 1\right)$$
        vi. else set
        $$v_{\mathbf{ost}} := \left(\left[(-1)^{v_{\mathbf{2}}[127]} \cdot 10^{e+6176} + 2^{127}\right]_{\mathbf{2}}, 0, 2^{128} - 1\right)$$
  2. else if $\mathsf{lb} \neq \perp$ and $\mathsf{ub} \neq \perp$,
     (a) if $\mathsf{type}(v) = \texttt{sint32}$, set $v_{\mathbf{ost}} := \big([v - \mathsf{lb}]_{\mathbf{2}}, \mathsf{lb}, \mathsf{ub}\big)$;
     (b) if $\mathsf{type}(v) = \texttt{int64}$, set $v_{\mathbf{ost}} := \big([v - \mathsf{lb}]_{\mathbf{2}}, \mathsf{lb}, \mathsf{ub}\big)$;
     (c) if $\mathsf{type}(v) = \texttt{sint64}$, set $v_{\mathbf{ost}} := \big([v - \mathsf{lb}]_{\mathbf{2}}, \mathsf{lb}, \mathsf{ub}\big)$;
  3. else if $\mathsf{lb} = \perp \mathsf{XOR} \mathsf{ub} = \perp$ abort;
  4. output $\mathbf{v}_{\mathbf{ost}}$.

Figure 25: The $\mathsf{OSTType}$ algorithm.